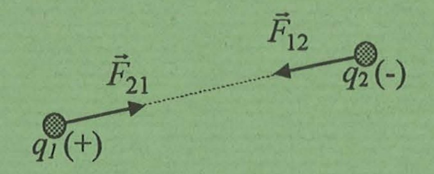
APUNTES SOBRE

ELECTROSTÁTICA

TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-12-07

APUNTES SOBRE

ELECTROSTÁTICA

TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-12-07

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

3 Área
12 Autor
07 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Apuntes sobre ELECTROSTÁTICA: Teoría y ejercicios resueltos

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 218.01 / 3-12-07
ISBN-10: 84-9728-202-7
ISBN-13: 978-84-9728-202-4
Depósito Legal: M-27150-2006

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Históricamente la *Electricidad* y el *Magnetismo* aparecen como campos separados (y como tales se abordan) hasta que en el año 1820 Öersted descubre la acción de la corriente eléctrica sobre una aguja imantada. Esta separación inicial supuso, en lo que a los aspectos dimensionales y a los sistemas de unidades se refiere, una 'división' que se ha mantenido, con frecuencia, prácticamente hasta nuestros días. Se abordará el tema desde la perspectiva histórica, aunque utilizando, en la medida de lo posible, la terminología y las expresiones formales actuales. Como esquema inicial se va a utilizar el mismo que consideró Maxwell en su *Treatise*[1] (Tratado) de 1983. El *Treatise* está dividido en cuatro partes:

Parte I. *Electrostática*.
Parte II. *Electrocinética* (*Galvanismo*).
Parte III. *Magnetismo*.
Parte IV. *Electromagnetismo*.

Este cuadernillo se dedica exclusivamente a la primera parte, la Electrostática. Las demás partes se estudiarán en cuadernillos posteriores.

---

[1] MAXWELL, J. C. (1873): *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover Publications, Inc. New York.

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La *Electrostática* es una *teoría física clásica* cuyo origen histórico se debe a Coulomb y se sitúa en el año 1785.

1.1. Elementos protofísicos

Como *protofísica*[2] de la Electrostática de Coulomb pueden considerarse:

a) Las *categorías fundamentales* clásicas: espacio, tiempo y materia *establecidas* para la Física por Newton, de las que surgieron las magnitudes fundamentales *longitud* (L), *duración* o tiempo (T) y *masa* (M).
b) La *Dinámica newtoniana*
c) La *teoría newtoniana de la Gravitación* (de la que se construye la Electrostática como analogía).

1.2. Concepto específico: carga

El concepto básico novedoso en esta teoría es el de *carga* o carga eléctrica, que presenta dos características relevantes:

a) Reside en cuerpos (acompaña a la *masa*)
b) Se presenta con dos signos opuestos que se consideran (+) y (-).

1.3. Estructura lógico-filosófica

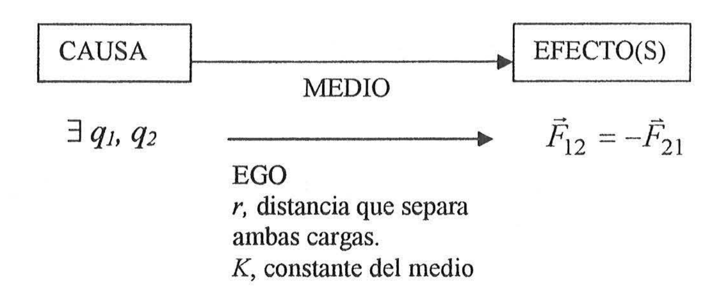
La estructura lógico-filosófica de esta teoría se resume en la siguiente tabla:

	Ámbito de la(s) "cosa(s)"		Ámbito del "acaecimiento"		
	"cosa(s)"	Propiedades caracterizadoras	"Acaecimiento" (entre "cosas")	Propiedades descriptoras	LEY(ES)
T.E.C.	CUERPOS CARGADOS (cargas puntuales)	a) Intrínsecas: q_1, q_2 b) Respectivas: r, distancia	ATRACCIÓN ó REPULSIÓN	Efectos: $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ (Dos fuerzas iguales y contrarias, una sobre cada carga)	Ley de Coulomb $(F_{12}) \propto \frac{(q_1)(q_2)}{(r_{12})^2}$

Esta teoría física, como todas las teorías físicas clásicas, tiene como *trasfondo filosófico* el *determinismo causal,* que puede expresarse y aplicarse de la forma siguiente:

---

[2] *Protofísica*: toda la física 'anterior' históricamente a la teoría física considerada.



"Dada una causa, se produce necesariamente siempre un determinado efecto, cuya cuantía depende también del medio en/sobre el que actúe dicha causa".

Se consideran los cuerpos cargados como *causa* de la interacción (fuerzas) entre ellos. El acaecimiento es la atracción o repulsión de éstos con las características que se expresan en el cuadro anterior. Según estas notas, la fuerza electrostática es el *efecto* de la atracción o repulsión entre los cuerpos cargados (cargas puntuales), cuya cuantía va a depender también de la distancia de separación entre dichos cuerpos.

1.4. Magnitudes primarias

Las *magnitudes primarias* de la Electrostática son: la distancia (o longitud), r; la fuerza, $\vec{F}$; y la carga, q.

r: magnitud fundamental, respectiva, algebraicamente escalar y topológicamente absoluta, que indica la distancia entre cada dos cargas consideradas. Su unidad en el SI es el metro (m).

$\vec{F}_{12}$: magnitud vectorial de proceso, *efecto* consecuencia de la mera existencia de las cargas. Por otra parte, en tanto que fuerza será *causa* de que se produzca un movimiento. La novedad respecto al concepto de fuerza de la Mecánica es que, desde este punto de vista, se considera la fuerza como *efecto* de la existencia de q_1 y q_2, del propio fenómeno de la atracción/repulsión, y, a su vez, *causa* del movimiento de dichas cargas. Topológicamente es una magnitud relativa: si las cargas se atraen tiene valor positivo y si se repelen, negativo. Su unidad en el SI es el newton (N).

q: magnitud de objeto, intrínseca y de naturaleza algebraica escalar. Se considera una magnitud fundamental. Puede tener valores positivos y negativos por lo que es topológicamente relativa. Su unidad en el SI es el culombio (C).

1.5. Ley fundamental

Cuando existen dos cargas q_1 y q_2, se ejerce una fuerza de interacción entre ellas, de una sobre la otra, dirigida a lo largo de la línea que las une. Dicha fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las cargas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.

El tránsito de la relación de proporcionalidad entre cantidades:

$$(F_{12}) \propto (q_1)(q_2)(r_{12})^{-2}$$

a la ecuación, relación de igualdad entre medidas, exige la presencia de una constante, de modo que se expresa (para el caso de la figura) de la forma siguiente:

$\vec{F}_{12}$ $\vec{F}_{21}$ $q_2 (-)$ $q_1 (+)$

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

Esta es la única ley que tiene esta teoría física, denominada *ley de Coulomb*, donde r_{12} es la distancia entre las dos cargas (m), magnitud primaria y fundamental de la Geometría; $\vec{F}$ es la fuerza (N), magnitud primaria de la Mecánica; $\vec{u}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ es el vector unitario que va desde q_1 hasta q_2; y q es la carga (C), magnitud primaria de la Electrostática y considerada en el marco general de la Física como magnitud fundamental nueva introducida por la Electricidad. Por tanto, aunque k sería una constante superflua[3], no se puede prescindir de ella porque la Física ha optado por fijar independientemente las unidades de las tres magnitudes de la ley. Su valor depende del medio dieléctrico existente entre las cargas:

$$k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}$$

Cuando el medio es el vacío, su valor, en el SI, es $k = 8'99.10^9$ N.m^2/C^2, y se conoce con el nombre de *constante de Coulomb*. Se suele expresar de la forma:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

siendo ε_o la *permitividad del vacío* o *constante dieléctrica del vacío*. En el SI su valor es:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi\, 9.10^9} = 8{,}85.10^{-12}\ \frac{C^2}{N\, m^2}$$

Para cualquier otro medio que no sea el vacío se utiliza la *constante dieléctrica absoluta* del medio $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_o$, donde ε_r es la *permitividad relativa* o *constante dieléctrica relativa* del medio (respecto a la del vacío), y la k se expresará de la forma:

$$k = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_r\,\varepsilon_o}$$

[3] Superflua en el sentido de la Teoría Dimensional.

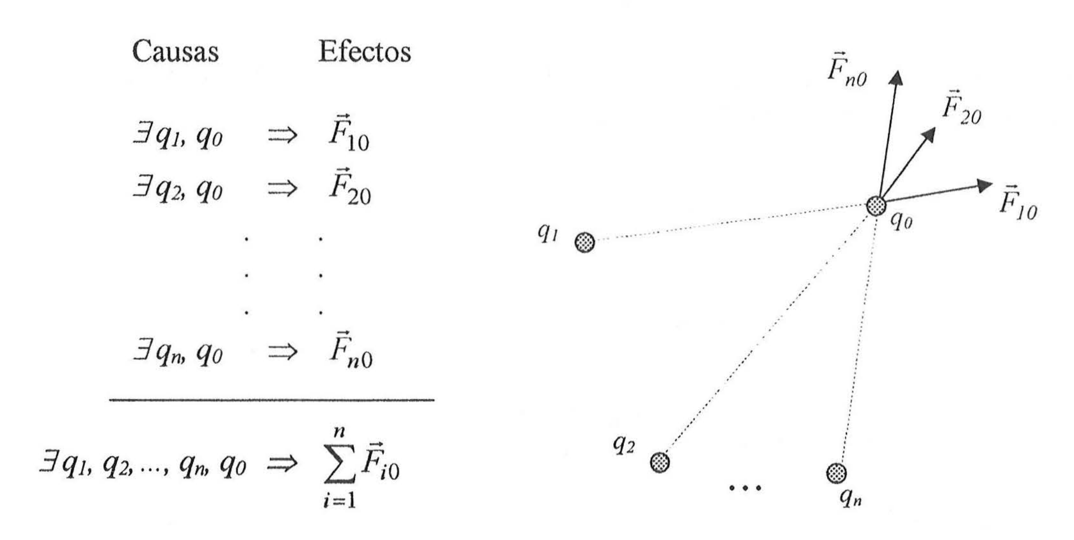
1.6. Analogía entre la Teoría newtoniana de la Gravitación (TNG) y la Teoría Electrostática de Coulomb (TEC)

La ley de la Electrostática de Coulomb es formalmente idéntica (*análoga* o *analógica*) a la ley de la Gravitación Universal de Newton con la salvedad de que mientras las masas son siempre positivas, las cargas eléctricas pueden ser positivas o negativas.

	TNG	TEC
Causa	$\exists\, m_1 , m_2$	$\exists\, q_1 , q_2$
Medio	EGO, r	EGO, r
Efecto	$\vec{F}_{g_{12}}$	$\vec{F}_{e_{12}}$

1.7. Principio de superposición de efectos

Si se tiene un sistema de cargas puntuales (en el ejemplo de la figura q_1, q_2, ..., q_n q_0), cada carga (q_1, q_2, ..., q_n) crea una fuerza sobre cada una de las otras (por ejemplo q_0). Por el principio de *superposición de efectos* (suma vectorial), la fuerza total que actúa sobre cada carga es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella debida a todas las demás.



El efecto total de las n causas es la suma de los n efectos de idéntica naturaleza. La ley de Coulomb, respecto a una carga cualquiera, q_0, se expresa de la forma:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i0} = k\, q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_{io}^2} \vec{u}_{io}$$

1.7. Aplicación a distribuciones continuas de carga

Si la atracción (o repulsión) no se produce entre dos cargas puntuales, sino entre una distribución continua de carga, Q, (alambre, anillo, corteza, cilindro, esfera...) y una carga puntual, q, la expresión de la fuerza electrostática que ejerce dicha distribución continua de carga sobre la carga puntual sería de la forma:

$$\vec{F} = \int_{Q} k \frac{dQ \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

Donde habría que estudiar con rigor la variabilidad:

a) De la distribución de la carga, dQ, que puede ser:

Lineal: $dQ = \lambda .dl$

Superficial: $dQ = \sigma .dS$

Volumétrica: $dQ = \rho .dV$

b) De la distancia, r, de cada elemento diferencial de la carga distribuida (dQ) a la carga puntual (q).

c) Del vector unitario, $\vec{u}_r$, que va desde cada dQ hacia q, que será distinto (en general) para cada dQ.

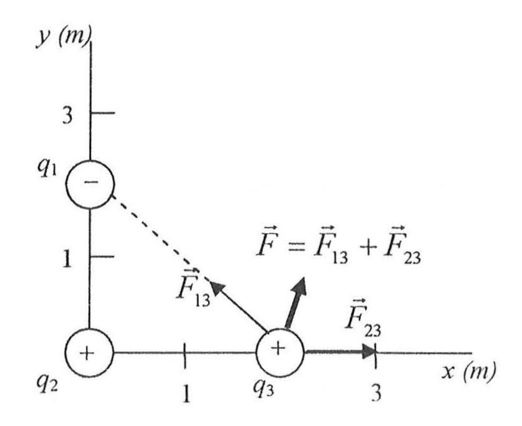
1.8. Ejercicios resueltos

1.1. Se consideran las tres cargas puntuales que se indican a continuación. La carga q_1 = - 40 μC está sobre el eje y en y = 2 m, la carga q_2 = 15 μC está en el origen de coordenadas y la carga q_3 = 30 μC está sobre el eje x en x = 2 m. Determinar la fuerza electrostática que actúa sobre q_3.

$q_1 = -40.10^{-6}$ C

$q_2 = 15.10^{-6}$ C

$q_3 = 30.10^{-6}$ C



La fuerza que ejerce la carga q_2 sobre la carga q_3 estará sobre la línea de acción que une dichas cargas, es decir, sobre el eje x, y como son cargas del mismo signo se repelen. Su valor será:

$$\vec{F}_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\vec{u}_{23} = 9.10^9\,\frac{15.10^{-6}.30.10^{-6}}{2^2}\vec{i} = 1{,}0125\,\vec{i} \quad (N)$$

La fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_3 será:

$$\vec{F}_{13} = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} = 9.10^9\,\frac{(-40.10^{-6}).30.10^{-6}}{(2^2+2^2)}\vec{u}_{13} = -1{,}35\,\vec{u}_{13} \quad (N)$$

Se descompone esta fuerza en sus dos componentes x e y para poder calcular la fuerza total resultante sobre q_3. Como $\vec{F}_{13}$ forma un ángulo de 45° con la horizontal se verifica que:

$$F_{13x} = F_{13}.\cos 45° = 1{,}35.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}9546\ (N) = F_{13y}$$

Y, por tanto:

$$\vec{F}_{13x} = -0{,}9546\,\vec{i} \quad (N)$$

$$\vec{F}_{13y} = 0{,}9546\,\vec{j} \quad (N)$$

La fuerza total será:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = -0{,}9546\,\vec{i} + 0{,}9546\,\vec{j} + 1{,}0125\,\vec{i} = 0{,}058\,\vec{i} + 0{,}9546\,\vec{j} \quad (N)}$$

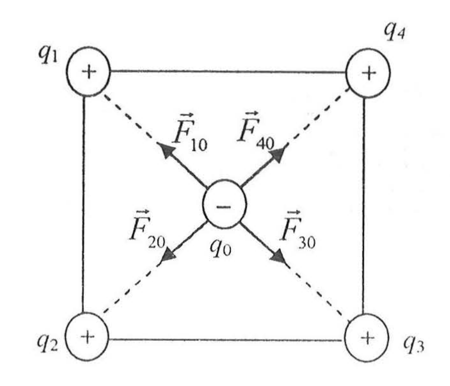
1.2. Se considera un cuadrado de 0,5 m de lado en el cual se coloca una carga puntual de 5 μC en cada uno de sus vértices. Determinar la fuerza electrostática total que actúa sobre otra carga q_0 = - 4 μC situada en el centro del cuadrado.

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 5.10^{-6}$ C

$q_0 = - 4.10^{-6}$ C

$\vec{F}_{10} = -\vec{F}_{30}$ porque $q_1 = q_3$

$\vec{F}_{20} = -\vec{F}_{40}$ porque $q_2 = q_4$



La fuerza resultante será la suma de las fuerzas (Principio de superposición de efectos):

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \vec{F}_{30} + \vec{F}_{40} = \vec{0}$$

1.3. Dos esferas iguales de radio r = 1,5 cm y de masa m = 10 g están suspendidas del mismo punto en una articulación libre por medio de unos hilos de longitud l = 20 cm y masa despreciable. Considerando que ambas esferas tienen la misma carga positiva, se pide:

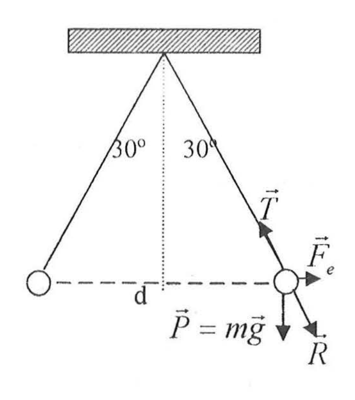
a) Valor de dicha carga si el ángulo que forman los dos hilos cuando están en equilibrio es de 60º.

b) Fuerza gravitatoria que existe entre las esferas cuando están en equilibrio.

Dato: Constante de la gravitación universal (G) = 6,67.10⁻¹¹ N.m²/kg².

a) Los hilos forman dos ángulos de 30° con la vertical

$$tg\,30° = \frac{F_e}{P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; F_e = \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{m\,g}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; k\frac{q^2}{d^2} = \frac{m\,g}{\sqrt{3}}$$



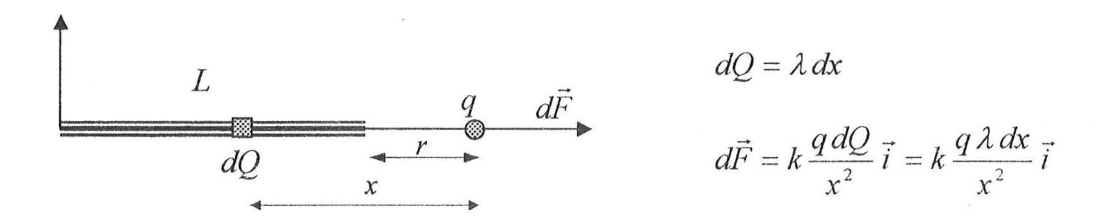
Como la distancia de separación entre las dos esferas es $d = 2(l+r)\,sen\,30°$, siendo l la longitud del hilo y r el radio de las esferas, se tiene:

$$\frac{k\,q^2}{4(l+r)^2 sen^2 30°} = \frac{m\,g}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; q = 2(l+r)\,sen 30° \sqrt{\frac{m\,g}{k\sqrt{3}}}$$

$$q = 2\,(0{,}2 + 0{,}015)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10.10^{-3}.9{,}8}{9.10^{9}\sqrt{3}}} = 5{,}39.10^{-7}\ C$$

b) $F_g = G\dfrac{m^2}{d^2} = G\dfrac{m^2}{4(l+r)^2 sen^2 30} = 6{,}67.10^{-11}\dfrac{(10.10^{-3})^2}{4(0{,}2+0{,}015)^2\,\frac{1}{4}} = 1{,}44.10^{-11}N$

1.4. Se considera una varilla de longitud L cargada con una carga uniforme de densidad lineal λ.
Calcular la fuerza que ejerce ésta sobre una carga puntual q situada en la misma línea de la varilla a una distancia r de su extremo más cercano.



$$dQ = \lambda\, dx$$

$$d\vec{F} = k\frac{q\,dQ}{x^2}\,\vec{i} = k\frac{q\,\lambda\,dx}{x^2}\,\vec{i}$$

Integrando a toda la varilla la fuerza resultante será:

$$\vec{F} = F\,\vec{i} \quad\Rightarrow\quad F = \int_r^{r+L} k\,q\,\lambda\frac{dx}{x^2} = k\,q\,\lambda\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+L}\right] = k\,q\,\lambda\frac{L}{r(r+L)}$$

$$\boxed{\vec{F} = k\,q\,\lambda\frac{L}{r(r+L)}\,\vec{i}}$$

1.5. Calcular la relación que existe entre la fuerza electrostática y la fuerza gravitatoria ejercida entre dos protones de masa m_p = 1,67.10^{-27} kg y carga e = 1,6.10^{-19} C. (G = 6,67.10^{-11} N.m^2/kg^2 ; k = 9.10^9 N.m^2/C^2).

La fuerza electrostática entre los protones, obtenida a partir de la ley de Coulomb, es repulsiva, ya que tienen el mismo signo, y su valor es:

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2}$$

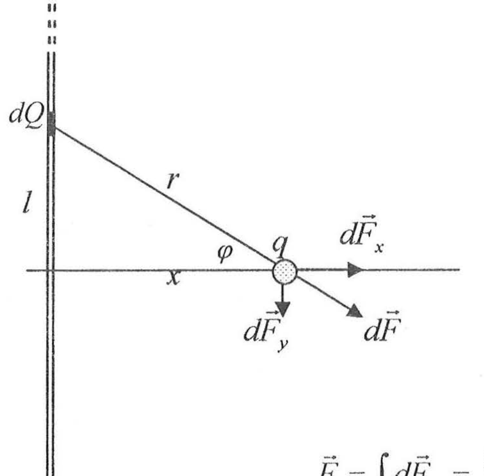
La fuerza gravitatoria, obtenida a partir de la ley de la Gravitación Universal de Newton, es atractiva y su valor:

$$F_g = G\frac{{m_p}^2}{r^2}$$

La relación entre estas dos fuerzas es independiente de la distancia de separación entre los protones:

$$\frac{F_e}{F_g}=\frac{k\,e^2}{G\,m_p{}^2}=\frac{9.10^9\ N.m^2/C^2}{6{,}67.10^{-11}\ N.m^2/kg^2}\cdot\frac{\left(1{,}6.10^{-19}\right)^2 C^2}{\left(1{,}67.10^{-27}\right)^2 kg^2}=1{,}24.10^{36}$$

1.6. Se considera una varilla supuesta de longitud infinita con una carga distribuida uniformemente de densidad lineal λ.
Calcular la fuerza que ejerce ésta sobre una carga puntual q situada a una distancia x de la varilla.



$$dQ=\lambda\,dl$$

$$d\vec{F}=k\frac{q\,dQ}{r^2}\vec{u}_r=k\frac{q\,\lambda\,dl}{r^2}\vec{u}_r$$

Por simetría las componentes verticales se anulan y sólo tendremos que considerar las horizontales:

$$\vec{F}=\int d\vec{F}_x=\int d\vec{F}\cos\varphi\ \Rightarrow\ \vec{F}=\left[\int_L k\frac{q\,\lambda\,dl}{r^2}\cos\varphi\right]\vec{i}$$

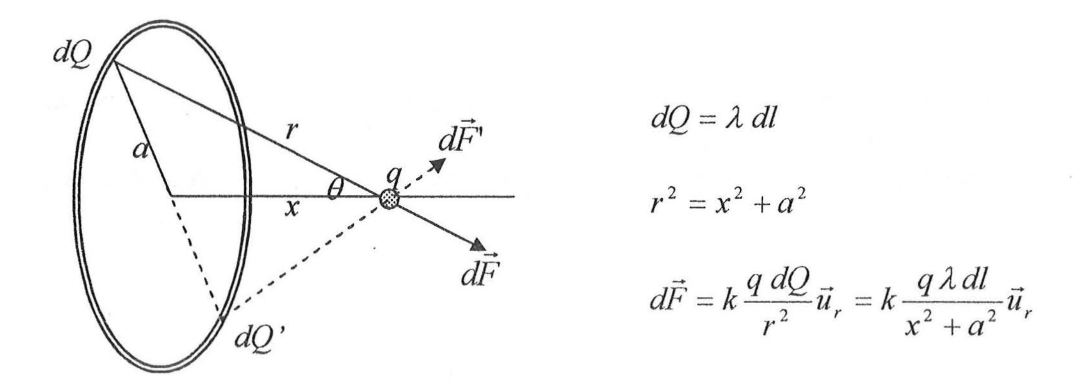
Como: $tg\,\varphi=\frac{l}{x}\ \Rightarrow\ l=x\,tg\,\varphi\ \Rightarrow\ dl=\frac{x}{\cos^2\varphi}d\varphi$ dado que aquí x es constante (un valor cualquiera pero determinado); y $\cos\varphi=\frac{x}{r}\ \Rightarrow\ r=\frac{x}{\cos\varphi}$, se expresa todo en función de la misma variable para poder integrar:

$$F=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{k\,q\,\lambda}{x^2}}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{x}{\cos^2\varphi}d\varphi\cos\varphi=\frac{k\,q\,\lambda}{x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{2\,k\,q\,\lambda}{x}$$

$$\boxed{\vec{F}=\frac{2\,k\,q\,\lambda}{x}\vec{i}}$$

Expresión final en al que x es arbitraria (cualquier valor).

1.7. Se considera un anillo de radio a cargado uniformemente con una densidad lineal de carga λ.
Calcular la fuerza que ejerce éste sobre una carga puntual q situada en un punto del eje perpendicular al plano del anillo a una distancia x de su centro.



Si se descompone $d\vec{F}$ en sus componentes x e y, se observa que debido a la simetría siempre habrá otro dQ' que creará otro $d\vec{F}'$ el cual al descomponerlo tendrá la misma componente perpendicular a x (paralelas al plano del anillo) pero de sentido contrario al creado por dQ. Por tanto, al considerar todo el anillo siempre se anularán las componentes perpendiculares (paralelas al plano del anillo) mientras que la fuerza total será la suma de todas las componentes sobre el eje x.

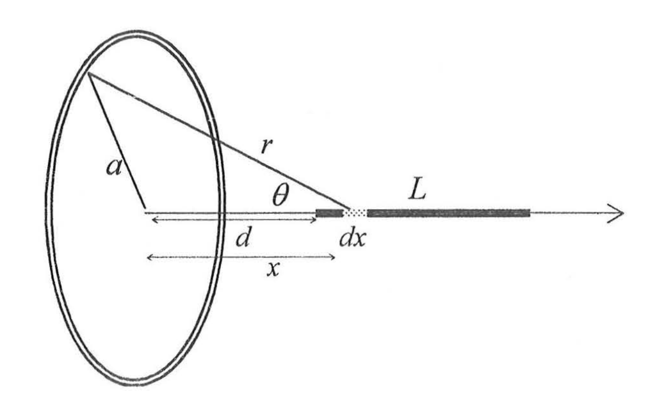
$$\vec{F} = \int d\vec{F}_x \quad \Rightarrow \quad F = \int dF\cos\theta = \int_L k\frac{q\,\lambda\, dl}{x^2+a^2}\cos\theta = \int_L k\frac{q\,\lambda\, dl}{x^2+a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$F = k\frac{q\,\lambda\, x}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_L dl = k\frac{q\,\lambda\, x}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2\pi a$$

$$\boxed{\vec{F} = k\frac{2\pi\, a\,\lambda\, x\, q}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} = k\frac{Q\, q\, x}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}}$$

Expresión en la que x es un valor cualquiera y $Q = 2\pi a\lambda$.

1.8. Se consideran un anillo de radio a y una varilla de longitud L que está situada sobre el eje perpendicular al plano del anillo a una distancia d del centro del mismo. Si ambos están cargados uniformemente con una densidad lineal de carga positiva λ, calcular la fuerza que ejerce el anillo sobre la varilla.



Anillo: $Q_a = \lambda\, 2\pi\, a$

Varilla: $dQ = \lambda\, dx$

$r^2 = x^2 + a^2$

$$d\vec{F} = k\frac{Q_a\, dQ}{r^2}\vec{u}_r = k\frac{Q_a\, \lambda\, dx}{x^2 + a^2}\vec{u}_r$$

Haciendo un razonamiento análogo al ejercicio anterior, la fuerza total será la resultante de todas las componentes sobre el eje x, porque las perpendiculares se anulan por simetría.

$$\vec{F} = \int d\vec{F}_x \quad \Rightarrow \quad F = \int dF\cos\theta = \int_L k\frac{Q_a\, \lambda\, dx}{x^2 + a^2}\cos\theta = \int_L k\frac{2\pi a\, \lambda \cdot \lambda\, dx}{x^2 + a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$F = 2\pi\, k\, a\, \lambda^2 \int_d^{d+L} \frac{x\, dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\, k\, a\, \lambda^2\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (d+L)^2}}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = 2\pi\, k\, a\, \lambda^2\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (d+L)^2}}\right)\vec{i}}$$

2. CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A CARGAS PUNTUALES

2.1. Concepto de campo eléctrico

La *ley de Coluomb* se refiere a la interacción entre dos cargas cualesquiera q_1 y q_2 situadas a distancia r según la dirección del versor $\vec{u}_{12}$:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

Si se cambia el punto de vista fijando la atención en *una sola carga* ($q_1 \equiv q$) y se supone que en todo punto del espacio existiera (ficción) una carga puntual q_2 unitaria, entonces la fuerza *que ejercería* q sobre la carga unitaria q_2 en cualquier punto del espacio geométrico ordinario sería:

$$\vec{F} = k\frac{q\ q_2(\equiv 1)}{r^2}\vec{u}_r$$

De modo que:

$$\frac{\vec{F}}{q_2(\equiv 1)} = \vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

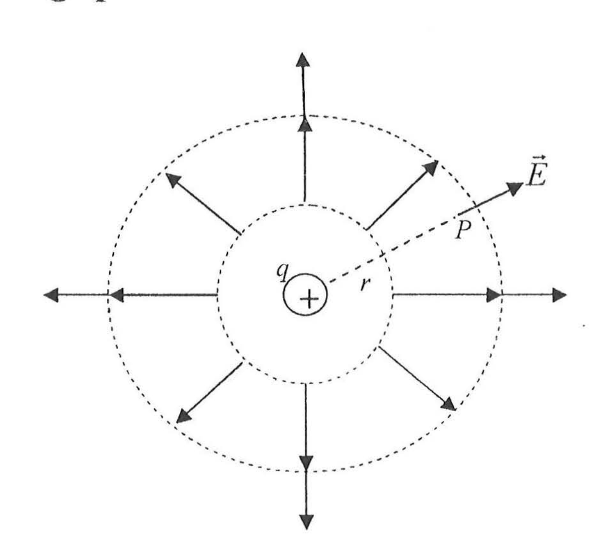
se considera el campo eléctrico (en consecuencia, en todo el espacio) creado por q.

El campo eléctrico es un *campo vectorial central* o *radial* o de *difusión radial isótropa*. Sus unidades en el SI son: N/C (Newton/culombio), o, también, V/m (voltio/metro, como se verá más adelante).

2.2. Campo eléctrico debido a una sola carga puntual

El campo eléctrico debido a una sola carga puntual q es radial (central), hacia fuera si la carga es positiva y hacia dentro si es negativa. Su expresión en un punto P cualquiera es:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k\,q}{r^2}\vec{u}_r}$$



en donde r es la distancia desde la carga q al punto P del campo y $\vec{u}_r$ es el vector unitario en P de sentido de q a P.

Si en el interior de dicho campo se introduce una carga puntual q', sobre ella el campo ejercerá una fuerza electrostática definida por:

$$\boxed{\vec{F} = q'\,\vec{E}}$$

2.3. Campo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales

El campo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales (por el principio de superposición de efectos) es la suma vectorial de los campos originados por cada carga separadamente

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = k \sum_i \frac{q_i}{r_{io}^2} \vec{u}_{io}$$

2.4. Líneas de campo eléctrico. Representación geométrica

El campo eléctrico se representa mediante unas líneas que indican la dirección del campo en cualquier punto. El vector campo $\vec{E}$ es tangente a la línea en cada punto e indica la dirección del campo eléctrico en dicho punto.

$$\vec{E} \;\; paralelo \;\; d\vec{l}$$

$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j} + E_z\,\vec{k}$$

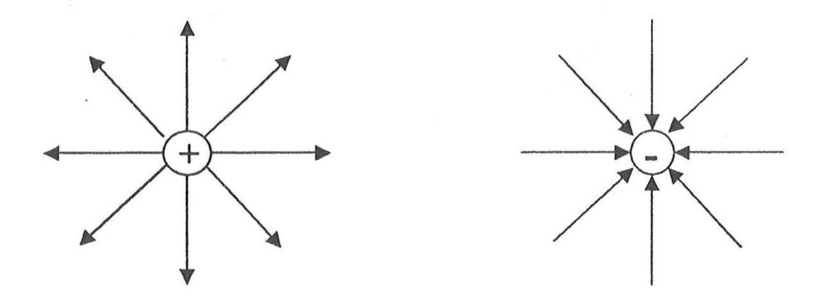
$$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

La ecuación diferencial de las líneas de campo eléctrico es:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Que constituye en sistema de dos ecuaciones diferenciales independientes. Su integración son dos familias de superficies cuyas intersecciones son las líneas de campo.

Las líneas de campo creado por una carga puntual se representan de la forma:



2.5. Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos

Toda fuerza es causa de movimiento (Mecánica clásica). Las fuerzas electrostáticas (de origen eléctrico) también generan movimiento, pero el problema ahora es mecánico. Cuando una partícula con carga q se coloca en un campo eléctrico $\vec{E}$, experimenta la acción de una fuerza $q\vec{E}$. (Las fuerzas gravitatorias que actúan sobre una partícula son usualmente despreciables en comparación con las fuerzas eléctricas). Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula de masa m, ésta adquiere una aceleración

$$\vec{F} = q\ \vec{E} = m\ \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

Si el campo eléctrico se conoce, puede determinarse la relación entre la carga y la masa de la partícula a partir de la aceleración medida.

2.6. Dipolos eléctricos

Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas iguales pero opuestas (distinto signo), separadas por una pequeña distancia.

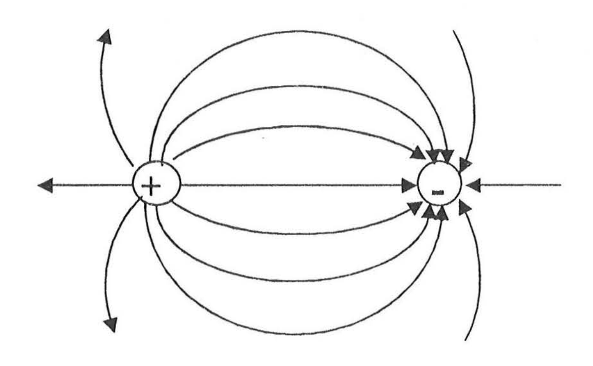
El *momento dipolar*, $\vec{p}$, es un vector de módulo igual al producto de la carga por la separación de las cargas, y apunta en la dirección desde la carga negativa a la positiva:

L

q^+ q^-

$$\vec{p} = q\,\vec{L}$$

La representación de las líneas de campo de un dipolo es:



2.7. Ejercicios resueltos

2.1. Hallar las ecuaciones de las líneas de campo que surgen de una carga puntual positiva.

Se supone que la carga q está situada en el origen de coordenadas. El campo eléctrico creado por ella en un punto cualquiera $P(x,y,z)$ es:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}_r = k\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

Como $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ y $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$, la expresión del campo queda de la forma:

$$\vec{E} = k\frac{q}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$$

La ecuación diferencial de las líneas de campo eléctrico es:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Y aplicado al campo anterior:

$$\frac{dx}{k\dfrac{qx}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dy}{k\dfrac{qy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dz}{k\dfrac{qz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Simplificando:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

a) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + C \Rightarrow \ln\dfrac{x}{y} = C \Rightarrow \dfrac{x}{y} = e^C \Rightarrow x = e^C y \Rightarrow x = c\,y$

Esta es la ecuación de la familia de planos que pasan por el eje z (radiación de planos de eje z).

b) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z} \Rightarrow \ln x = \ln z + C' \Rightarrow \ln\dfrac{x}{z} = C' \Rightarrow \dfrac{x}{z} = e^{C'} \Rightarrow x = e^{C'} z \Rightarrow x = c'\,z$

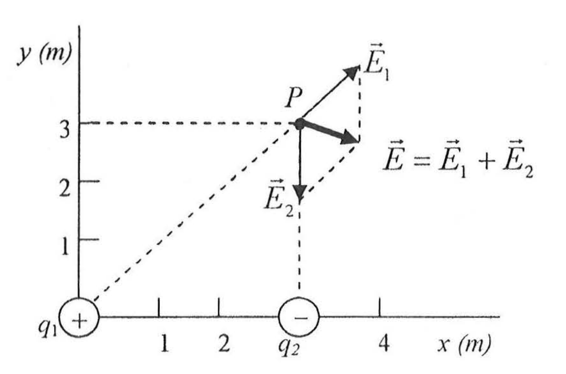
Esta es la ecuación de la familia de planos que pasan por el eje y (radiación de planos de eje y).

Las líneas de campo son rectas que pasan por el origen (radiación de rectas de origen el origen).

2.2. Se considera una carga puntual q_1 = 20 nC que está en el origen de coordenadas y otra carga puntual q_2 = -15 nC que está sobre el eje x en x = 3 m. Determinar el campo electrostático en el punto P situado en x = 3 m, y = 3 m.

$q_1 = +20.10^{-9}$ C ; $q_2 = -15.10^{-9}$ C

El campo electrostático $\vec{E}$ en el punto P será la resultante del campo debido a q_1, $\vec{E}_1$, y del debido a q_2, $\vec{E}_2$. $\vec{E}_2$ tiene la dirección y negativa $(-\vec{j})$. Por tanto, dicho campo será:



$$\vec{E}_2 = k\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = \frac{9.10^9\,(N.m^2/C^2).(-15.10^{-9}C)}{(3\,m)^2}\,\vec{j} = -15\,\vec{j}\,(N/C)$$

El campo $\vec{E}_1$ tiene la dirección de la recta que va desde q_1 hasta P y están separados una distancia de $3\sqrt{2}$ m. Este campo será:

$$\vec{E}_1 = k\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1 = \frac{9.10^9\,(N.m^2/C^2).(20.10^{-9}C)}{(3\sqrt{2}\,m)^2}\,\vec{u}_1 = 10\,\vec{u}_1\left(\frac{N}{C}\right)$$

siendo $\vec{u}_1$ el vector unitario que va desde q_1 hasta P. Para poder calcular $\overline{E}$ se descompone el campo $\vec{E}_1$ en sus dos componentes E_x e E_y. Como $\vec{E}_1$ forma un ángulo de 45° con cada uno de estos ejes dichas componentes serán iguales y de valor $\frac{E_1}{\sqrt{2}}$.

$$E_{1x} = E_{1y} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}07\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\,\vec{i} + E_{1y}\,\vec{j} = 7{,}07\,\vec{i} + 7{,}07\,\vec{j}\,\left(\frac{N}{C}\right)$$

El campo total tendrá también dos componentes:

$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j}$$

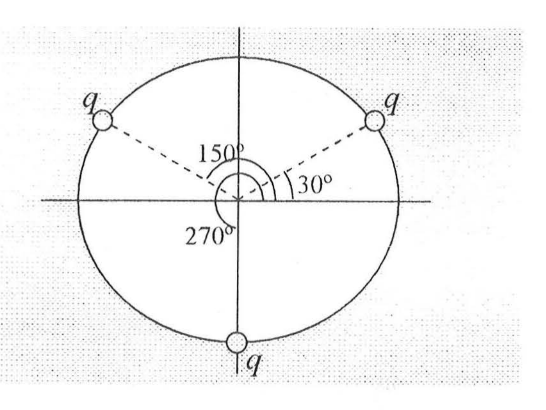
Siendo:

$$E_x = 7{,}07 \frac{N}{C}$$

$$E_y = E_{1y} + E_2 = 7{,}07 - 15 = -7{,}93 \frac{N}{C}$$

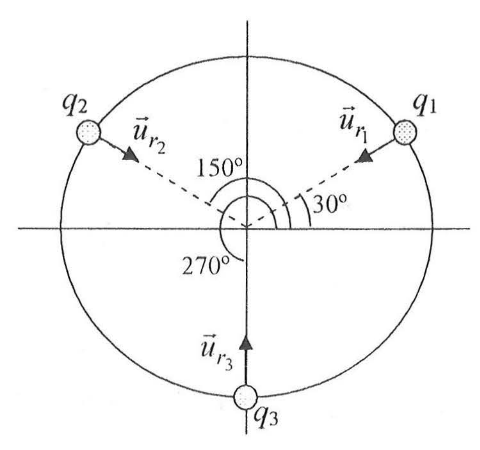
$$\boxed{\vec{E} = 7{,}07\,\vec{i} - 7{,}93\,\vec{j} \quad \left(\frac{N}{C}\right)}$$

2.3. Se consideran tres cargas puntuales idénticas, q, que se encuentran a lo largo de una circunferencia de radio r formando ángulos de 30º, 150º y 270º como muestra la figura. Calcular el campo eléctrico resultante en el centro de la circunferencia.



El campo eléctrico total en el centro, por el principio de superposición de efectos, será el campo resultante de los campos debido a cada una de las tres cargas:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{3} k \frac{q_i}{r^2} \vec{u}_{r_i}$$



$$\vec{E}_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} = k \frac{q}{r^2} \left(-\cos 30^\circ\,\vec{i} - sen\ 30^\circ\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} = k \frac{q}{r^2} \left(\cos 30^\circ\,\vec{i} - sen\ 30^\circ\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_3 = k \frac{q_3}{r_3^2} \vec{u}_{r_3} = k \frac{q}{r^2} \left(\vec{j}\right)$$

El campo eléctrico total será la resultante de los tres:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = k \frac{q}{r^2} \left(\cos 30^\circ\,\vec{i} - \cos 30^\circ\,\vec{i} - 2\,sen\ 30^\circ\,\vec{j} + \vec{j}\right) = \vec{0}$$

2.4. Se crea un campo eléctrico uniforme de valor 5,4.10⁴ N/C, entre las láminas de un condensador plano. Calcular la aceleración a la que está sometido un electrón situado en el interior de dicho campo si las láminas están separadas una distancia de 3 cm. Datos: carga del electrón = -1,6.10⁻¹⁹ C; masa del electrón = 9,1.10⁻³¹ kg.

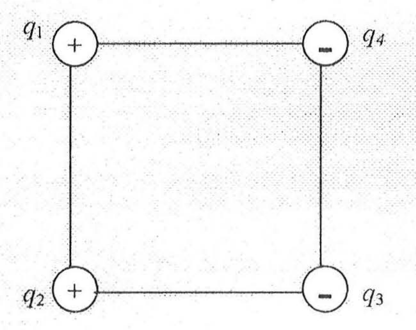
La fuerza que actúa sobre el electrón es la electrostática:

$$\vec{F}_{electrostática} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

La aceleración del electrón tendrá la misma dirección del campo eléctrico en el que se encuentra y sentido opuesto (dado que la carga es negativa); y su módulo será:

$$a = \frac{Ee}{m} = \frac{5{,}4.10^{4}.1{,}6.10^{-19}}{9{,}1.10^{-31}} = 9{,}49.10^{15}\ \frac{m}{s^2}$$

2.5. Se considera un cuadrado de 0,5 m de lado en el cual se coloca una carga puntual de 5 μC en cada uno de sus vértices, dos positivas y dos negativas como muestra la figura.
Determinar el campo eléctrico total en un punto situado en el centro del cuadrado.



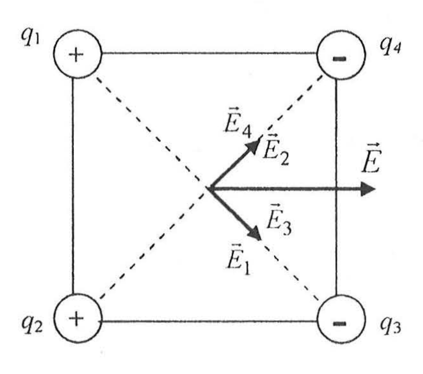
Por el principio de superposición de efectos:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_3 \quad \text{y} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_4$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = k\frac{q}{r^2}\left(\cos 45°\,\vec{i} - sen\,45°\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_4 = k\frac{q}{r^2}\left(\cos 45°\,\vec{i} + sen\,45°\,\vec{j}\right)$$



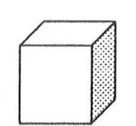
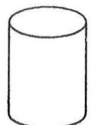
$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_2 = 2k\frac{q}{r^2}\left(2\cos 45°\,\vec{i}\right) = 4.9.10^9\,\frac{5.10^{-6}}{0{,}125}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} = 1{,}02.10^6\,\vec{i}\ \left(\frac{N}{C}\right)$$

3. CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

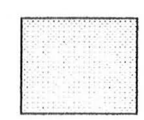
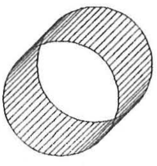
3.1. Carga y densidad de carga

La carga distribuida en cuerpos permite introducir como magnitud secundaria la denominada "densidad de carga" que se define, según la naturaleza geométrica de los cuerpos, de las siguientes maneras:

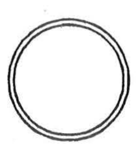
a) *Densidad volumétrica de carga*: $\rho \equiv \dfrac{dq}{dV}$

b) *Densidad superficial de carga*: $\sigma \equiv \dfrac{dq}{dS}$

c) *Densidad lineal de carga*: $\lambda \equiv \dfrac{dq}{dl}$



donde ρ, σ y λ tienen naturaleza de "magnitud intensiva".

Esta nueva magnitud, en general, puede considerarse como función de punto y tiempo, $\rho(P,t) \equiv \rho(x,y,z,t)$. De ordinario, se supone que es función diferenciable. Si es constante, la carga está uniformemente (homogéneamente) distribuida.

3.2. Obtención del campo eléctrico mediante la ley de Coulomb

Una distribución de carga eléctrica crea un campo que se expresa en un punto arbitrario P mediante la expresión:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_Q \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u}_r = \int_V \frac{k\,\rho\,dV}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{(distribución volumétrica de carga)}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_Q \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u}_r = \int_S \frac{k\,\sigma\,dS}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{(distribución superficial de carga)}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_Q \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u}_r = \int_L \frac{k\,\lambda\,dl}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{(distribución lineal de carga)}$$

Tres tipos de problemas de naturaleza matemática pueden presentarse cuando se intenta calcular la integral:

1) *Relativo a* ρ, σ ó λ*:* si no es constante, obviamente no puede sacarse fuera de la integral (lo que sí puede hacerse con la constante universal *k*).
2) *Relativo a r*: la distancia de cada elemento diferencial a *P* es variable, por lo que no puede sacarse de la integral.
3) *Relativo a* $\vec{u}_r$: se trata de una integral vectorial. Habría que integrar por componentes (nunca el 'módulo').

Estas dificultades hacen difícil la obtención del campo por este procedimiento. Sólo algunos casos especiales permiten una fácil integración.

3.3. Obtención del campo eléctrico mediante la aplicación del Teorema de Gauss

La descripción cualitativa del campo eléctrico mediante líneas de campo está relacionada con una ecuación matemática llamada *ley de Gauss*, que relaciona el campo eléctrico sobre una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie. Esta ecuación permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una línea infinita.

El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) en un campo eléctrico es igual a $4\pi k$ veces la carga neta encerrada dentro de la superficie:

$$\phi = \int_S \vec{E} . d\vec{S} = 4 \pi k Q_{dentro}$$

Este teorema sólo puede aplicarse cuando siendo simétrico el campo eléctrico, puede utilizarse una superficie gaussiana en la cual el campo es uniforme en toda ella y, además, dicho campo es normal a la superficie en todos los puntos de la misma.

Escribiendo la constante de Coulomb *k* en función de la permitividad o constante dieléctrica del vacío (definida en el capítulo primero), la expresión matemática del teorema de Gauss queda de la forma:

$$\phi = \int_S \vec{E} . \vec{d}S = \frac{1}{\varepsilon_o} Q_{dentro}$$

3.4. Obtención del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico

El campo eléctrico creado por una carga puntual es un campo vectorial central diferenciable, conservativo e irrotacional ($r\vec{o}t \; \vec{E} = \vec{0}$) y deriva de un potencial escalar.

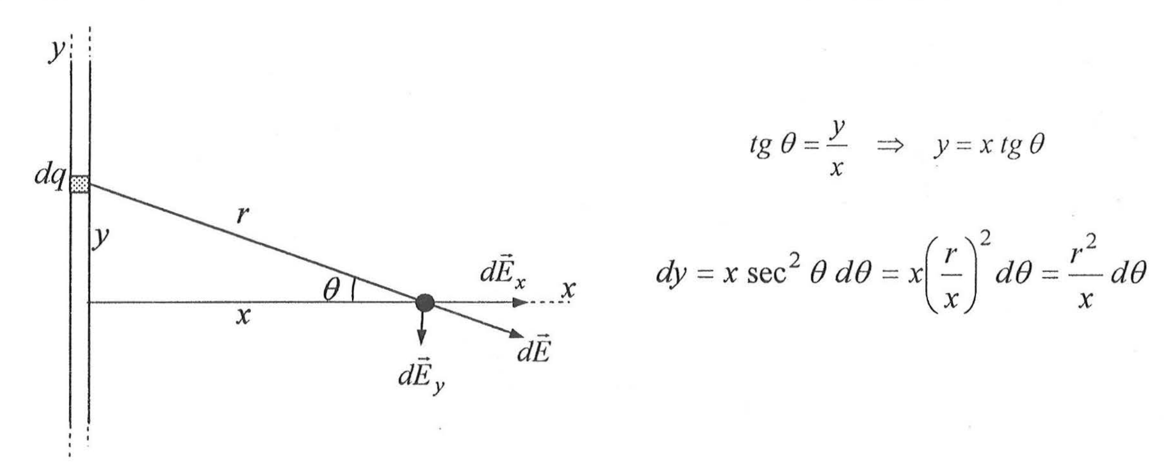
El campo eléctrico creado por un conjunto de cargas puntuales (dos o más) no es central pero sí mantiene su condición de irrotacional y, en consecuencia, deriva de un potencial escalar.

Si se conoce el potencial se puede calcular el campo utilizando la expresión:

$$\vec{E} = - gr\vec{a}d \; V$$

3.5. Ejercicios resueltos de obtención del campo eléctrico mediante la ley de Coulomb

3.1. Determinar el campo eléctrico debido a una carga lineal positiva infinita, de densidad λ, en un punto situado a una distancia x de dicha carga.



Se considera un elemento diferencial $dq = \lambda\, dy$, situado a una distancia r del punto en el cual se quiere determinar el valor del campo eléctrico. Dicho dq crea un $d\vec{E}$ en dicho punto cuyo valor viene dado por la expresión:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = k\frac{\lambda\, dy}{r^2}\vec{u}_r$$

Debido a que la carga lineal es infinita, la componente vertical del campo eléctrico ($d\vec{E}_y$) se anula con la componente vertical del dq simétrico, considerando el eje x la línea horizontal en la que se encuentra el punto en el que determinamos el campo eléctrico. Por tanto, el campo eléctrico debido a toda la carga lineal sólo será debido a la componente horizontal ($d\vec{E}_x$) correspondiente a cada dq.

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}\cdot \cos\theta$$

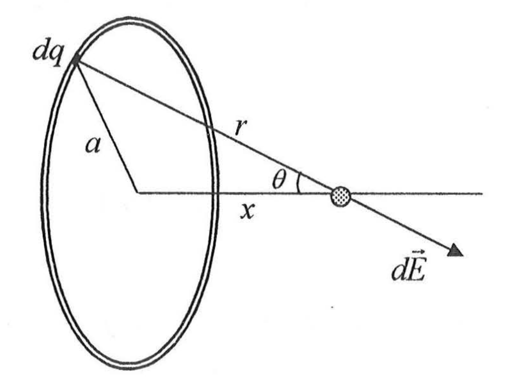
El módulo de dicho vector será:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} k\frac{\lambda\, dy}{r^2}\cos\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} k\lambda\frac{r^2\!/_x\, d\theta}{r^2}\cos\theta = \frac{k\lambda}{x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = 2\frac{k\lambda}{x}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{2k\lambda}{x}$$

y la dirección y sentido hacia el eje positivo de la x (según el dibujo). Realmente, las líneas de campo serían radiales y hacia fuera (por ser la carga positiva).

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2\,k\,\lambda}{x}\vec{i}}$$

3.2. Determinar el campo eléctrico creado por un anillo de radio a uniformemente cargado con una carga total Q, en un punto situado sobre el eje perpendicular al plano del anillo a una distancia x del centro del mismo.



$$r^2 = a^2 + x^2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$d\vec{E} = k\,\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}_r$$

La componente perpendicular al eje x del campo eléctrico se anula con su simétrica, por lo que el campo sólo va a tener componente x.

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}\cdot\cos\theta = dE_x\,\vec{i}$$

La dirección y sentido del campo en el punto considerado será la del eje x positivo ($\vec{i}$), y el módulo:

$$E_x = \int_Q dE_x = \int_Q k\,\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \int_Q k\,\frac{dq}{r^2}\,\frac{x}{r} = \int_Q k\,dq\,\frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

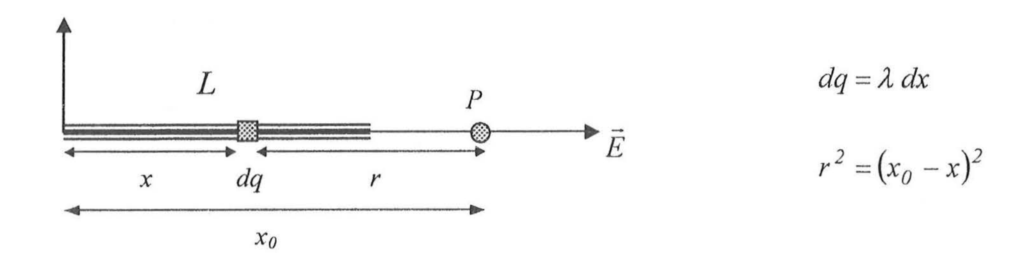
Tanto la distancia r del elemento dq al punto en el que se quiere determinar el campo eléctrico, como la distancia x desde el centro del disco a dicho punto, son constantes y, por tanto, se pueden sacar de la integral. La expresión queda de la forma:

$$E_x = \frac{k\,x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\int_Q dq = \frac{k\,x\,Q}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k\,x\,Q}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\vec{i}}$$

3.3. Obtener la expresión del campo eléctrico creado por una carga lineal positiva, de carga total Q, y de longitud L, en un punto P situado sobre el eje de dicha carga a una distancia x_0 desde el extremo más lejano de la misma ($x_0>L$).



$$dq = \lambda\, dx$$

$$r^2 = (x_0 - x)^2$$

El módulo del campo eléctrico en el punto P vendrá dado por la expresión:

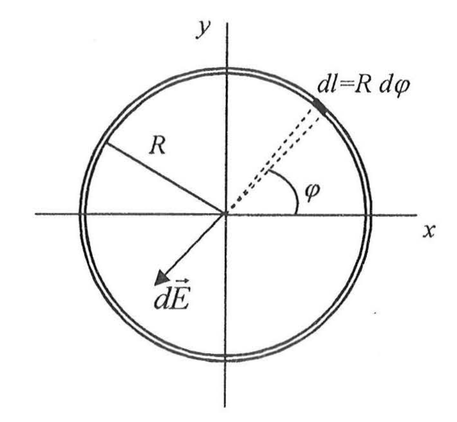
$$E = \int_Q k\,\frac{dq}{r^2} = \int_0^L k\,\frac{\lambda\, dx}{(x_0 - x)^2} = k\,\lambda\left[\frac{1}{x_0 - x}\right]_0^L = k\,\lambda\left(\frac{1}{x_0 - L} - \frac{1}{x_0}\right) = k\,\lambda\,\frac{L}{x_0(x_0 - L)}$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k\,Q}{x_0\,(x_0 - L)}\,\vec{i}}$$

Si L es mucho menor que x_0, el campo eléctrico en P es, aproximadamente, $\frac{k\,Q}{x_0^2}$; es decir, si estamos suficientemente lejos de la carga lineal, ésta se comporta como una carga puntual que estuviera situada a una distancia x_0.

3.4. Se considera un anillo de radio R cargado con una densidad lineal de carga no uniforme que viene dada por la expresión: $\lambda=\lambda_0$ sen φ. Determinar el campo eléctrico en el centro del anillo.



$$\lambda=\lambda_0 \, sen \, \varphi$$

$$dl = R d\varphi$$

$$\vec{R} = R\left(\cos\varphi \, \vec{i} + sen\,\varphi \, \vec{j}\right)$$

El anillo tendrá la mitad superior cargada positivamente y la mitad inferior negativamente.

$$d\vec{E} = -k\frac{dq}{R^2}\vec{u}_r = -k\frac{dq}{R^3}\vec{R} = -k\frac{\lambda\, dl}{R^3}\vec{R} = -k\frac{\lambda_0 sen\,\varphi\; R\, d\varphi}{R^3}R(\cos\varphi\,\vec{i} + sen\,\varphi\,\vec{j})$$

$$d\vec{E} = -k\frac{\lambda_0}{R}(\cos\varphi\,\vec{i} + sen\,\varphi\,\vec{j})\, sen\,\varphi\, d\varphi$$

Se introduce el signo (-) porque el campo eléctrico ($d\vec{E}$) tiene sentido contrario a $\vec{R}$. Integrando a todo el anillo:

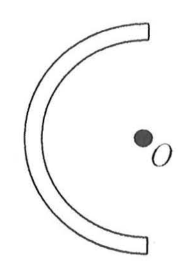
$$\vec{E} = -\int_0^{2\pi} k\frac{\lambda_0}{R}(\cos\varphi\,\vec{i} + sen\,\varphi\,\vec{j})\, sen\,\varphi\, d\varphi = -\frac{k\lambda_0}{R}\left[\int_0^{2\pi}\cos\varphi\; sen\,\varphi\, d\varphi\,\vec{i} + \int_0^{2\pi} sen^2\varphi\, d\varphi\,\vec{j}\right]$$

$$\vec{E} = -\frac{k\lambda_0}{R}\left[\left(\frac{sen^2\varphi}{2}\right)_0^{2\pi}\vec{i} + \left(\frac{2\varphi - sen\,2\varphi}{4}\right)_0^{2\pi}\vec{j}\right] = -\frac{k\lambda_0}{R}\left[0\,\vec{i} + \frac{4\pi - 0}{4}\vec{j}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{k\lambda_0\pi}{R}\vec{j}}$$

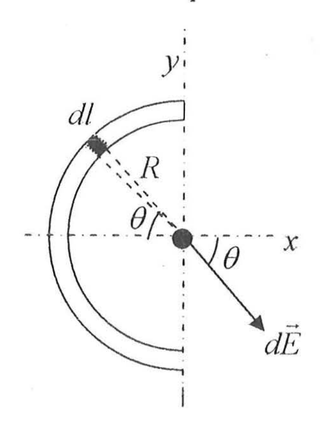
La simetría respecto del eje y hace que tenga esta dirección y sentido.

3.5. Una varilla de longitud L que está cargada uniformemente con una densidad lineal λ, se dobla para formar una semicircunferencia de radio R como se indica en la figura. Determinar el campo eléctrico en el punto O, situado en el centro de la semicircunferencia.



El campo eléctrico creado por un elemento $dq = \lambda\, dl$ de la varilla se expresa:

$$d\vec{E} = k\,\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = k\,\frac{\lambda\, dl}{R^2}\,\vec{u}_r$$



Descomponiendo $d\vec{E}$ en sus componentes x e y, y considerando que la componente según y se anula por simetría respecto del eje x, el campo sólo tiene componente x. Por tanto:

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}\cdot \cos\theta = dE_x\,\vec{i}$$

La dirección y sentido será la del eje x positivo ($\vec{i}$), y el módulo:

$$dE_x = k\,\frac{\lambda\, dl}{R^2}\cos\theta = k\,\frac{\lambda\, R\, d\theta}{R^2}\cos\theta$$

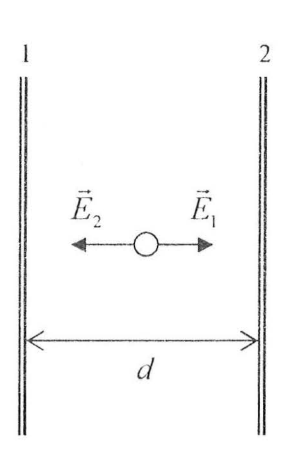
$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE_x = \frac{k\,\lambda}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{k\,\lambda}{R}\left[sen\ \theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k\lambda}{R}\left[sen\,\frac{\pi}{2} - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2k\,\lambda}{R}\,\vec{i}}$$

3.6. Se consideran dos hilos paralelos iguales muy finos y largos (de longitud infinita) y separados una distancia d, que están cargados positivamente de manera uniforme, con una densidad lineal de carga, λ. Se pide:
a) Determinar el campo eléctrico en un punto situado entre los dos hilos a una distancia $\frac{d}{2}$.
b) Calcular la fuerza con que se repelen los hilos.

a) El campo eléctrico creado por un hilo infinito cargado con una densidad λ en un punto situado a una distancia r del mismo viene dado por la expresión (Ver ejercicio 3.1):

$$E_r = \frac{2\,k\,\lambda}{r}$$



Al tener dos hilos iguales con la misma carga, el campo eléctrico creado por cada uno de ellos tiene el mismo valor a la distancia $\frac{d}{2}$, la misma dirección y sentidos opuestos.

Por tanto, por el principio de superposición de efectos, el campo eléctrico total será la resultante de ambos, que es nula.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

b) La expresión de la fuerza ($d\vec{F}$) ejercida sobre un elemento dl del hilo será:

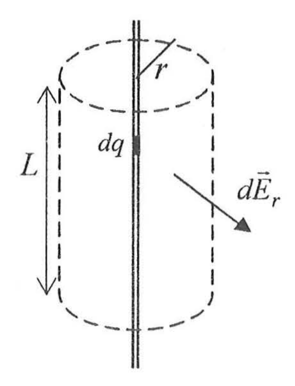
$$d\vec{F} = \vec{E}.dq = \vec{E}.\lambda.dl$$

La dirección de la fuerza es perpendicular a los hilos y el sentido de repulsión entre ambos (como el campo eléctrico). Su módulo es:

$$F = \int_L E.\lambda.dl = \int_L \frac{2k\lambda}{d}\,\lambda\,dl = \frac{2k\lambda^2}{d}\,L$$

3.6. Ejercicios resueltos de obtención del campo eléctrico mediante aplicación del teorema de gauss

3.7. Se considera un hilo infinitamente largo cargado con una densidad lineal de carga uniforme y positiva, λ. Determinar la expresión del campo eléctrico en un punto situado a una distancia r de dicha carga.



Por simetría, las líneas de campo irradian perpendicularmente (en planos normales a la línea) hacia fuera uniformemente desde la línea de carga, por ser ésta positiva (hacia dentro, si fuese negativa). El campo es, por tanto, perpendicular a toda superficie cilíndrica cuyo eje coincida con la carga lineal. Se la considera como superficie gaussiana para la resolución del ejercicio ya que el campo eléctrico posee el mismo módulo en cualquier punto de dicha superficie.

$$\phi_{neto} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q_{dentro}$$

La carga neta dentro de esta superficie será:

$$Q = \int_L \lambda\, dl$$

Como está uniformemente distribuida, λ es constante, por lo que la carga neta es el producto de la carga por unidad de longitud, λ, multiplicada por la longitud *L:*

$$Q = \lambda . L$$

Dado que el área de la superficie lateral cilíndrica es $2\pi rL$, el flujo será:

$$\phi_{neto} = E_r \cdot 2\pi\, r\, L = \frac{\lambda\, L}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, \lambda\, L$$

El flujo por las bases de la superficie cilíndrica es nulo por ser el campo paralelo a dichas bases. Por tanto, el módulo del campo eléctrico creado por la carga lineal será:

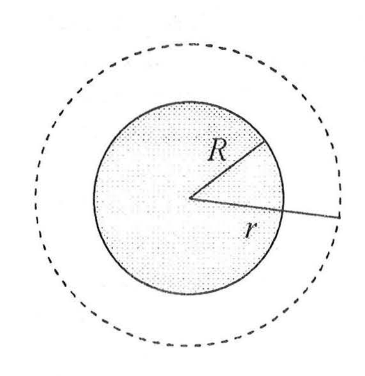
$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} = \frac{2\, k\, \lambda}{r}$$

Y la dirección radial plana y el sentido hacia fuera por ser la carga positiva (hacia dentro si fuera negativa).

3.8. Se considera una esfera maciza no conductora de radio R, uniformemente cargada con una carga positiva, Q. Se pide:
a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
b) Representar gráficamente dicho campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera.

a.1) Para calcular el campo en cualquier *punto exterior a la esfera* se parte de la ley de Gauss:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi k\, Q_{dentro}$$



Se considera una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio $r \geq R$. Como el campo eléctrico tiene el mismo módulo en cualquier punto de dicha superficie (campo central de módulo constante en ella), el flujo eléctrico a través de la misma viene dado por la expresión:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.4\pi\, r^2$$

El campo eléctrico es *radial* debido a la simetría y tiene sentido *hacia el exterior* por ser positiva la carga. Para determinar el módulo de dicho campo eléctrico utilizamos la ley de Gauss, sabiendo que la carga total que hay dentro de la superficie gaussiana es la carga total de la esfera, *Q*.

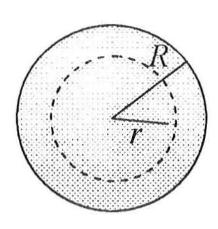
$$\phi_{neto} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q_{dentro}$$

$$E_r.4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = k\,\frac{Q}{r^2} \qquad si \quad r \geq R}$$

Si $r \geq R$ la expresión del campo eléctrico es la misma que la de una carga puntual *Q* situada en el centro de la esfera.

a.2) Para calcular el campo en cualquier *punto del interior de la esfera* se considera una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio $r \leq R$.



El campo eléctrico sigue siendo constante a través de dicha superficie gaussiana, por lo que el flujo viene dado por la expresión:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r . 4\pi\, r^2$$

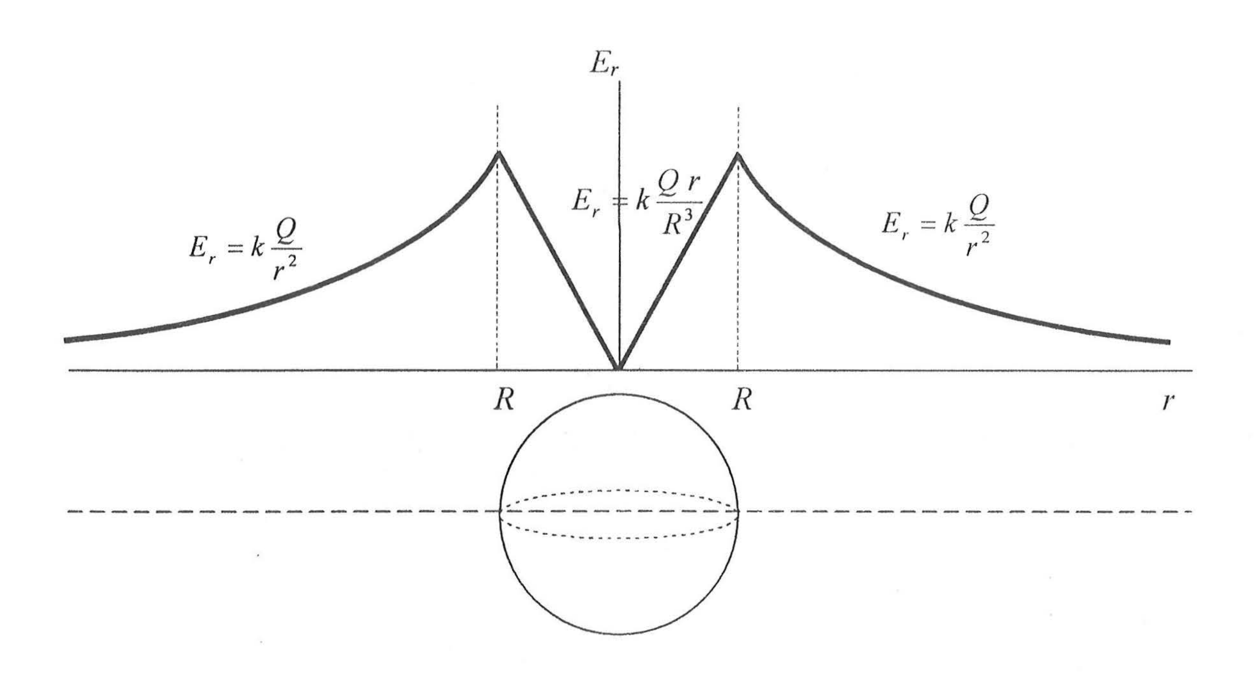
El campo eléctrico es *radial* debido a la simetría y sentido *hacia el exterior* por ser positiva la carga. Para determinar el módulo del campo eléctrico utilizamos la ley de Gauss, sabiendo que la carga total que hay dentro de la superficie gaussiana es:

$$Q_{dentro} = \rho V_{sup.\,gauss.} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} . \frac{4}{3}\pi\, r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$E_r . 4\pi\, r^2 = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = \frac{Q \cdot r^3}{\varepsilon_0 \cdot R^3}$$

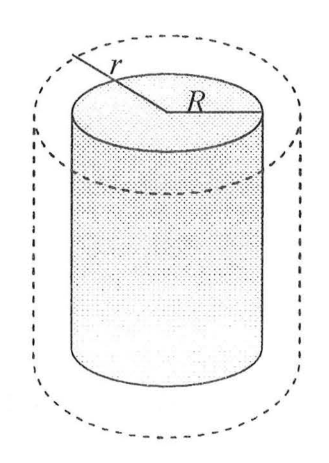
$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q \cdot r}{R^3} = k\frac{Q \cdot r}{R^3} \quad si \quad r \leq R$$

b) Representación gráfica del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera:



3.9. Se considera un cilindro macizo de radio R y longitud infinita, uniformemente cargado con una densidad volumétrica de carga positiva, ρ. Se pide:
a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
b) Representar gráficamente dicho campo eléctrico en función de la distancia al eje del cilindro.

a.1) Para determinar el campo eléctrico en cualquier *punto del exterior del cilindro* se considera una superficie gaussiana cilíndrica coaxial con el cilindro de radio **r** ≥ **R** y de longitud L, ya que el campo eléctrico será perpendicular en todos los puntos de la misma y de módulo constante. Por las caras superior e inferior de dicha superficie gaussiana el flujo es nulo.



El flujo a través de dicha superficie gaussiana será:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.2\pi\, r\; L$$

Por simetría el campo será *radial plano* (E_r), y como la carga es positiva el sentido será *hacia el exterior*.

Dado que la superficie gaussiana es exterior al cilindro, la carga total dentro de esta superficie es:

$$Q = \rho.V = \rho\,\pi\, R^2 L$$

Aplicando el teorema de Gauss obtenemos el módulo del campo eléctrico

$$\phi_{neto} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\; Q_{dentro}$$

$$E_r.2\pi\, r\, L = \frac{\rho\pi R^2 L}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_r = \frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0 r} = 2\pi\, k\, \rho\frac{R^2}{r}}$$

Si se expresa en función de la carga por unidad de longitud a lo largo del cilindro:

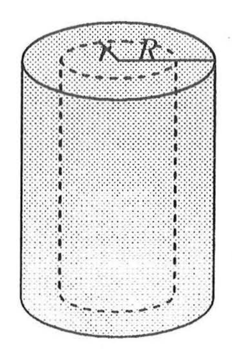
$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{\rho\pi\, R^2 L}{L} = \rho\pi\, R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\lambda}{\pi\, R^2}$$

Por tanto:

$$\boxed{E_r = \frac{2k\,\lambda}{r}}$$

Este campo eléctrico es el mismo que el campo que crearía una carga lineal infinita distribuida sobre el eje del cilindro.

a.2) Para calcular el campo en cualquier punto del interior del cilindro se considera una superficie gaussiana cilíndrica coaxial de radio $\boldsymbol{r \leq R}$.



Análogamente al caso anterior, el flujo a través de esta superificie gaussiana será:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.2\pi\, r\; L$$

La carga total dentro de la superficie gaussiana es:

$$Q_{dentro} = \rho \cdot V_{sup.gauss} = \rho\, \pi\, r^2 L$$

El campo será *radial plano* y *hacia el exterior* y su módulo, aplicando la ley de Gauss, será:

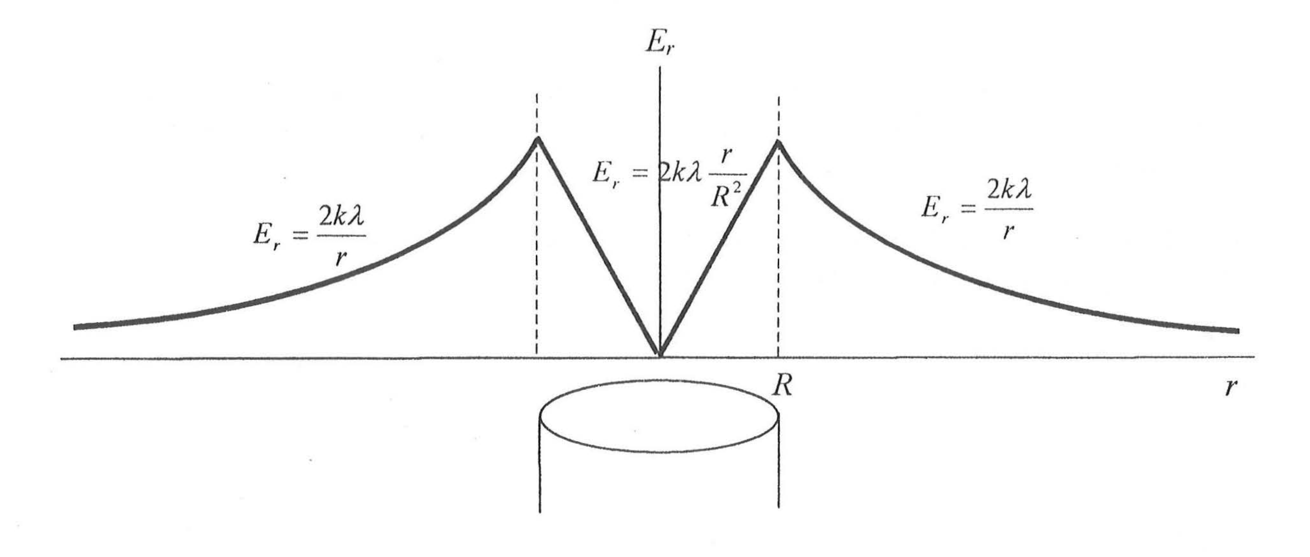
$$E_r.2\pi\, r\, L = \frac{\rho\, \pi\, r^2 L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_r = \frac{\rho\, r}{2\, \varepsilon_0} = 2\pi\, k\, \rho\, r}$$

Expresándolo en función de la densidad lineal de carga $\left(\rho = \dfrac{\lambda}{\pi R^2} \right)$:

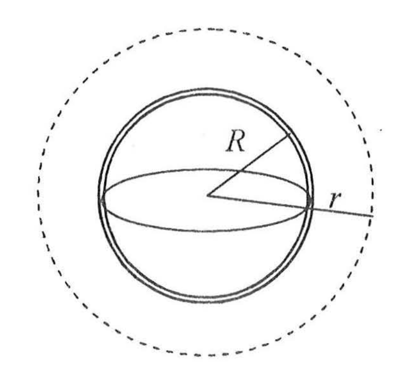
$$\boxed{E_r = \frac{2k\lambda r}{R^2}}$$

b) Representación gráfica del campo eléctrico en función de la distancia al eje del cilindro:



3.10. Se considera una corteza esférica de radio R, uniformemente cargada con una carga positiva, Q. Se pide:
a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
b) Representar gráficamente dicho campo en función de la distancia al centro de la corteza.

Para calcular el campo en cualquier *punto exterior* a la corteza se considera una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio $r \geq R$.



El módulo del campo eléctrico es constante a través de dicha superficie gaussiana, por lo que el flujo viene dado por la expresión:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.4\pi\, r^2$$

Por simetría el campo eléctrico es *radial,* y sentido *hacia el exterior* por ser positiva la carga.

Para determinar el módulo del campo eléctrico utilizamos el teorema de Gauss, sabiendo que la carga total que hay dentro de la superficie gaussiana es la carga total de la corteza esférica, Q.

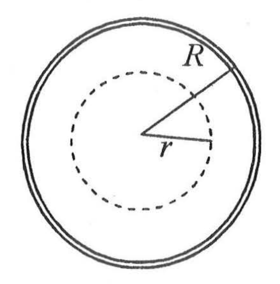
$$\phi_{neto} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q_{dentro}$$

$$E_r.4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = k\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R}$$

El campo eléctrico es el mismo que el que crearía una carga puntual de carga Q situada en el centro de la corteza, es decir, el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la corteza.

a.2) Para calcular el campo en cualquier *punto del interior* de la esfera se considera una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio $r < R$.



El flujo neto a través de la superficie gaussiana viene dado por la expresión:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.4\pi\, r^2$$

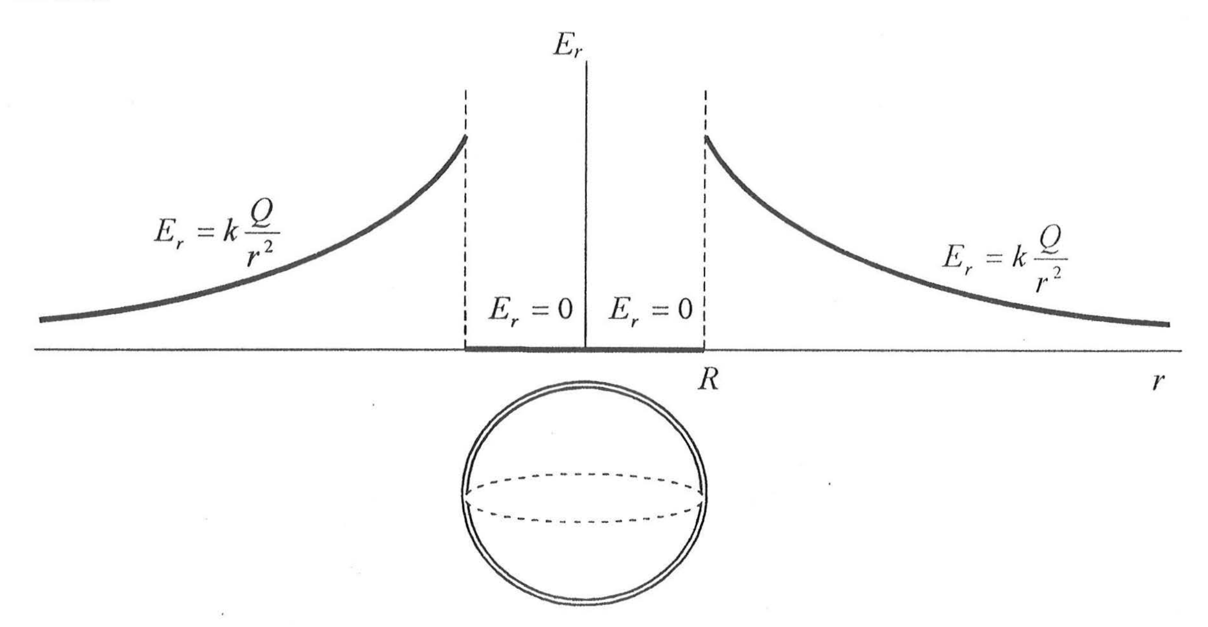
Pero la carga total dentro de dicha superficie es cero, por lo que aplicando la ley de Gauss:

$$\phi_{neto} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q_{dentro} = 0$$

$$E_r.4\pi\, r^2 = 0$$

$$\boxed{E_r = 0 \qquad si \quad r < R}$$

b) Representación gráfica del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la corteza:

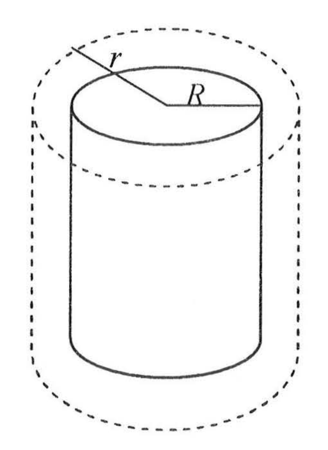


El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, en donde está distribuida uniformemente la carga. Dentro de la corteza el campo es nulo, y justo en la corteza su valor es $E_r = k\dfrac{Q}{R^2}$.

Nota: Las expresiones del campo obtenidas son las mismas que las creadas por una esfera conductora, ya que en ésta la carga se distribuye uniformemente por toda la superficie.

3.11. Se considera una corteza cilíndrica infinita de radio R, uniformemente cargada con una densidad superficial de carga positiva, σ. Se pide:
a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
b) Representación gráfica de dicho campo en función de la distancia al eje de la corteza.

a.1) Para determinar el campo eléctrico en cualquier *punto del exterior* de la corteza se considera una superficie gaussiana cilíndrica coaxial con la corteza de radio $r \geq R$ y de longitud L, ya que el campo eléctrico será constante y perpendicular en todos los puntos de la misma. Por las caras superior e inferior de dicha superficie gaussiana el flujo es nulo.



El flujo a través de dicha superficie gaussiana será:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r .2\pi\, r\, L$$

Por simetría el campo será *radial plano* (E_r), y como la carga es positiva el sentido será *hacia el exterior*.

Dado que la superficie gaussiana es exterior al cilindro, la carga total dentro de esta superficie es:

$$Q = \sigma.S = \sigma.2\pi RL$$

Aplicando el teorema de Gauss obtenemos el módulo del campo eléctrico

$$\phi_{neto} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q_{dentro}$$

$$E_r .2\pi\, r\, L = 4\pi\, k\, \sigma\, 2\pi\, RL$$

$$\boxed{E_r = \frac{4\pi\, k\, \sigma\, R}{r} \qquad si \quad r \geq R}$$

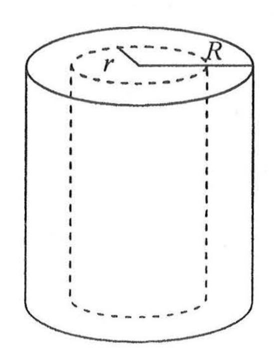
Si se expresa en función de la carga por unidad de longitud a lo largo de la corteza:

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{\sigma\, 2\pi\, RL}{L} = \sigma\, 2\pi\, R \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\lambda}{2\pi\, R}$$

$$\boxed{E_r = \frac{2k\,\lambda}{r} \qquad si \quad r \geq R}$$

Este campo eléctrico en cualquier punto del exterior es el mismo que el campo que crearía una carga lineal infinita distribuida sobre el eje de la corteza cilíndrica.

a.2) Para calcular el campo en cualquier *punto del interior* de la corteza se considera una superficie gaussiana cilíndrica coaxial de radio $r \leq R$.



Análogamente al caso anterior, el flujo a través de esta superficie gaussiana será:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.2\pi\, r\; L$$

La carga total dentro de la superficie gaussiana es:

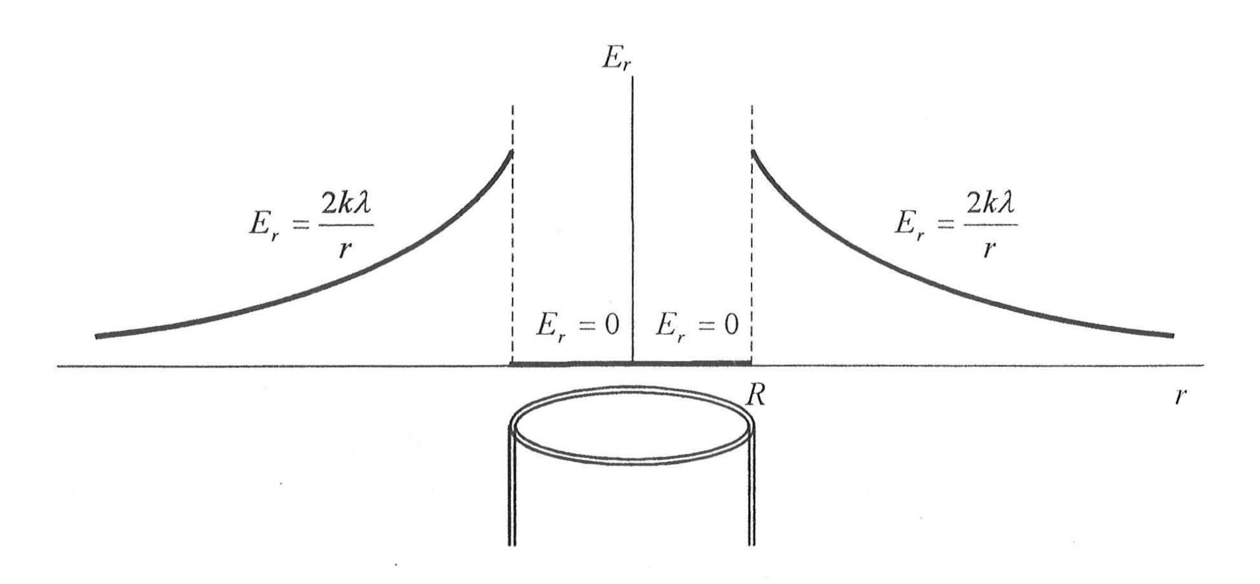
$$Q_{dentro} = 0$$

Por tanto, aplicando la ley de Gauss, el campo eléctrico será:

$$E_r.2\pi\, r\, L = 0$$

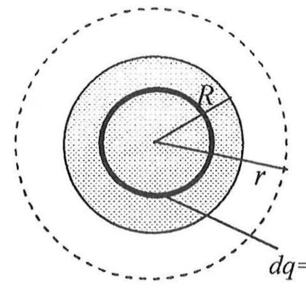
$$\boxed{E_r = 0 \qquad si \quad r \leq R}$$

b) Representación gráfica del campo eléctrico creado por una corteza cilíndrica en cualquier punto en función de la distancia a su eje:



El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, en donde está la carga superficial uniforme, σ. Dentro de la corteza el campo es nulo, y justo en la corteza su valor es $\mathrm{E} = 4\pi k\sigma = \dfrac{2k\lambda}{R}$.

3.12. Una esfera de radio R tiene una densidad de carga variable dada por la relación $\rho = \dfrac{a}{r}$, siendo a una constante física. Determinar la expresión del campo eléctrico en cualquier punto del espacio en función de r.



Para calcular el campo en cualquier *punto exterior* a la esfera se considera una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio $r \geq R$. Como el campo eléctrico tiene el mismo valor en cualquier punto dicha superficie (campo constante), el flujo eléctrico a través de la misma viene dado por la expresión:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.4\pi\, r^2$$

El campo eléctrico es *radial* debido a la simetría y sentido *hacia el exterior* por ser positiva la carga. Para determinar el módulo del campo eléctrico utilizamos la ley de Gauss, sabiendo que la carga total que hay dentro de la superficie gaussiana es la carga total de la esfera, Q.

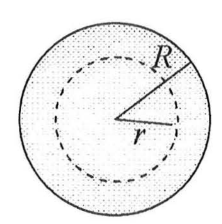
$$Q_{dentro} = Q = \int_V \rho\, dV = \int_0^R \frac{a}{r}\, 4\pi r^2 dr = 4\pi a \int_0^R r\, dr = 2\pi a\, R^2$$

Por el teorema de Gauss:

$$\phi_{neto} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = 4\pi\, k\, Q_{dentro} \Rightarrow E_r.4\pi\, r^2 = 4\pi k\, 2\pi a\, R^2$$

$$\boxed{E_r = \frac{2\pi a k\, R^2}{r^2} \qquad si \quad r \geq R}$$

Para calcular el campo en cualquier *punto del interior* de la esfera se considera una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio $r < R$.



El campo eléctrico sigue siendo constante a través de dicha superficie gaussiana, por lo que el flujo viene dado por la expresión:

$$\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} = E_r.4\pi\, r^2$$

El campo eléctrico es *radial* debido a la simetría y sentido *hacia el exterior* por ser positiva la carga. Para determinar el módulo del campo eléctrico se utiliza el teorema de Gauss, sabiendo que la carga total que hay dentro de la superficie gaussiana es:

$$Q_{dentro} = \int_V \rho\, dV = \int_0^r \frac{a}{r} 4\pi\, r^2 dr = 2\pi a r^2$$

$$E_r.4\pi\, r^2 = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi a r^2}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_r = \frac{a}{2\varepsilon_0} = 2\pi k a \quad si \quad r \leq R}$$

4. POTENCIAL ELÉCTRICO

4.1. Energía potencial[4] mecánica de origen eléctrico: sus variaciones

Cuando una fuerza conservativa actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\vec{l}$, la variación de la función energía potencial dU asociada al carácter conservativo viene definida por la expresión:

$$dU = - \vec{F} \, . d\vec{\ell} = - dW$$

El trabajo realizado por una fuerza conservativa disminuye la energía potencial. (Primer principio: La energía disminuye al realizar el trabajo).

La fuerza ejercida por un campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga puntual q_o es:

$$\vec{F} = q_o \vec{E}$$

Cuando la carga experimenta un desplazamiento $d\vec{l}$ en un campo eléctrico $\vec{E}$ la variación de energía potencial electrostática viene expresada de la forma:

$$dU = - q_o \vec{E} \, . d\vec{l}$$

Si la carga se desplaza desde una posición inicial a hasta otra final b, la variación de energía potencial electrostática es:

$$\Delta U = U_b - U_a = \int_a^b dU = - \int_a^b q_o \vec{E} \, . d\vec{l}$$

4.2. Diferencia de potencial eléctrico

La variación de energía potencial es proporcional a la carga testigo q_o. La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina *diferencia de potencial, dV*:

$$dV = \frac{dU}{q_o} = - \vec{E} \, . d\vec{l}$$

Para un desplazamiento finito desde el punto a a un punto b, el cambio de potencial se expresa de la forma:

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_o} = - \int_a^b \vec{E} \, . d\vec{l}$$

[4] Magnitud "potencial" (de la que deriva un campo vectorial conservativo de un potencial) que está determinada a menos de una constante aditiva. Sólo pueden conocerse diferencias.

La diferencia de potencial V_b - V_a es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga testigo positiva cuando ésta se desplaza del punto *a* al punto *b*.

La unidad en el SI del potencial y de la diferencia de potencial es el voltio (V):

$$1V = 1\frac{J}{C}$$

En función de esta unidad, la unidad del campo eléctrico es también:

$$1\frac{N}{C} = 1\frac{V}{m}$$

Las *líneas de campo eléctrico* señalan en la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico.

4.3. Potencial eléctrico creado por una carga puntual

El campo eléctrico creado por una carga puntual $\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{r}$ es un campo vectorial central diferenciable, lo que implica que es un campo conservativo, irrotacional y que, por tanto, deriva de un potencial:

$$\vec{E} = -\vec{grad}\,V$$

El potencial correspondiente a una carga puntual es:

$$V = k\frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{r}_0 = -\left(-k\frac{q}{r^2}\vec{r}_0\right)$$

4.4. Potencial eléctrico creado por una distribución continua de carga

El potencial correspondiente a una distribución continua de carga se obtiene extendiendo la integral a toda la distribución:

$$V = \int\frac{k\,dq}{r} = \int k\frac{\rho\,dV}{r}$$

Esta expresión puede utilizarse sólo si la distribución de carga está contenida en un volumen finito, de modo que *el potencial puede considerarse nulo en el infinito.*

4.5. Energía potencial electrostática debida a varias cargas puntuales

Si una carga testigo q_o se deja en libertad en un punto situado a una distancia r de una carga puntual q que se mantiene fija en el origen, la carga testigo es acelerada en la dirección del campo eléctrico. El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando la carga testigo se mueve de r a ∞ es:

$$W = \int_r^\infty q_o \vec{E} . d\vec{\ell} = q_o \int_r^\infty E_r \, dr = q_o \int_r^\infty k \frac{q}{r^2} dr = k \frac{q\, q_o}{r}$$

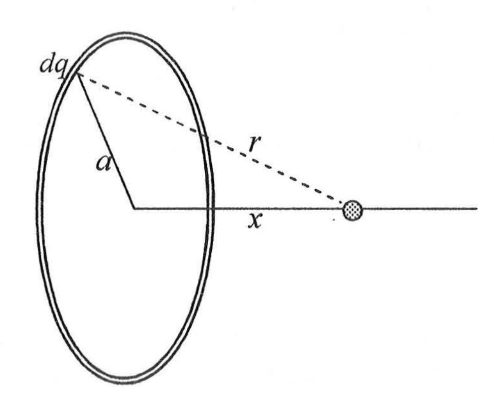
Este trabajo es la energía potencial electrostática del sistema formado por las dos cargas:

$$U = k \frac{q\, q_o}{r} = q_o V$$

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una posición finita (r) hasta sus posiciones finales (∞). Alternativamente, la energía potencial puede definirse como el trabajo que debe realizar una fuerza aplicada $\vec{F}_{ap} = - q_o \vec{E}$ para trasladar una carga positiva q_o desde el infinito hasta una distancia r medida desde una carga puntual q.

4.6. Ejercicios resueltos

4.1. Determinar el potencial eléctrico creado por un anillo de radio a uniformemente cargado con una carga total Q, en un punto situado sobre el eje perpendicular al plano del anillo a una distancia x del centro del mismo.



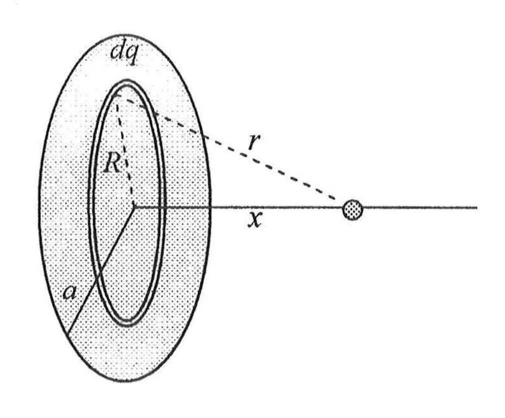
$$r^2 = a^2 + x^2$$

El potencial en el punto considerado debido al anillo cargado será:

$$V = \int_Q k\frac{dq}{r} = \int_Q k\frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2+a^2}}\int_Q dq$$

$$\boxed{V = \frac{k\,Q}{\sqrt{x^2+a^2}}}$$

4.2. Determinar el potencial eléctrico creado por un disco de radio a uniformemente cargado con una densidad de carga superficial, σ, en un punto situado sobre el eje perpendicular al plano del disco a una distancia x del centro del mismo.



El potencial en el punto del eje situado a una distancia x debido a la carga del disco será:

$$V = \int_Q k\frac{dq}{r} = k\int_S \frac{\sigma.dS}{r}$$

$$V = k\int_0^a \frac{\sigma.2\pi R\,dR}{\sqrt{x^2+R^2}} = k.2\pi.\sigma\int_0^a \frac{R\,dR}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\boxed{V = 2\pi\,k\,\sigma\left(\sqrt{x^2+a^2} - x\right)}$$

4.3. Se considera una esfera conductora, de radio R, que está cargada uniformemente con una carga positiva Q. Se pide:
a) Determinar el potencial eléctrico creado por ella en cualquier punto del espacio.
b) Representar gráficamente dicho potencial en función de la distancia al centro de la esfera.

Como la esfera es conductora, la carga estará distribuida uniformemente sobre su superficie, y las expresiones del campo eléctrico debido a dicha esfera, siendo r la distancia desde el centro de la esfera a cualquier punto del espacio (obtenidas en el ejercicio 3.10), son:

$$r \leq R \quad : \quad \vec{E} = \vec{0}$$

$$r \geq R \quad : \quad \vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

La obtención del potencial, conocido el campo eléctrico se realiza mediante la expresión:

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E}.d\vec{r}$$

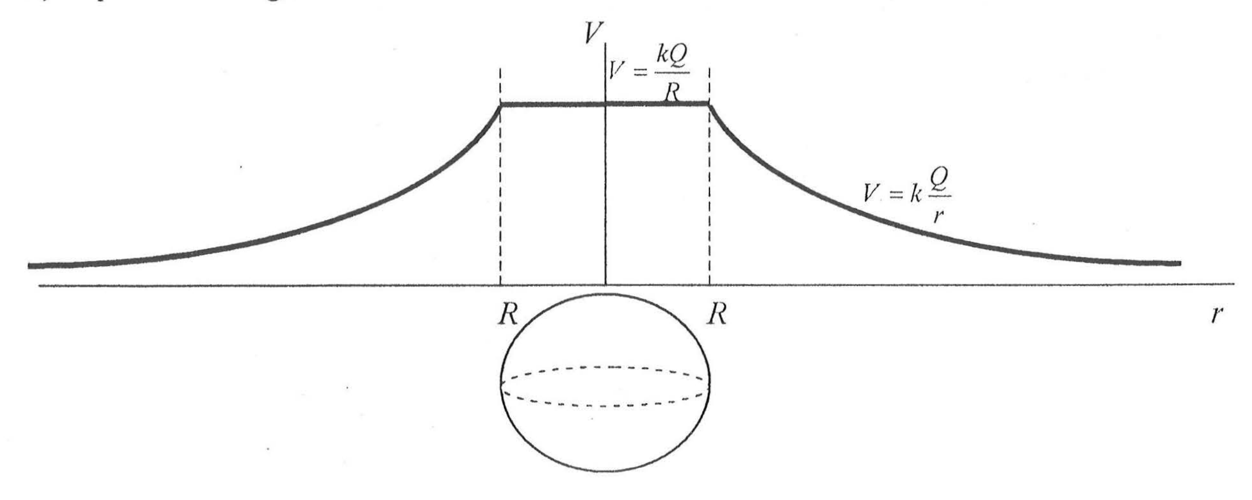
En cualquier punto exterior a la esfera ($r > R$) el potencial será:

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E}.d\vec{r} = \int_r^{\infty} k\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r.d\vec{r} = kQ\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{kQ}{r} \quad si\ r \geq R}$$

Para $r < R$, es decir, para cualquier punto del interior de la esfera el campo eléctrico es nulo; por lo que todos los puntos de la esfera están al mismo potencial. Bastará, entonces, aplicar la expresión anterior a un punto situado en la superficie externa de la esfera para saber el valor en todos los demás.

$$\boxed{V = \frac{kQ}{R} \quad si\ r \leq R}$$

b) Representación gráfica:



4.4. Se considera un cilindro macizo no conductor de radio R y longitud infinita, uniformemente cargado con una densidad volumétrica de carga positiva, ρ. Determinar el potencial eléctrico en cualquier punto del espacio.

En el ejercicio 3.9. se ha calculado el campo eléctrico creado por este cilindro en cualquier punto del espacio, obteniendo las expresiones:

$$E = 2\pi k \rho \frac{R^2}{r} \qquad si\ r > R$$

$$E = 2\pi k \rho r \qquad si\ r < R$$

Se considera que el potencial tiene valor cero en la superficie del cilindro.

El potencial para cualquier punto fuera del cilindro (r >R) será el trabajo realizado al transportar la unidad de carga desde la superficie del cilindro al punto:

$$V = \int_r^R \vec{E}.d\vec{r}$$

Haciendo que el transporte de la unidad de carga a lo largo de la línea de campo eléctrico, $\vec{E}$ y $d\vec{r}$ son paralelos, por lo que la integral anterior se reduce a:

$$V = \int_r^R E.dr = \int_r^R 2\pi k \rho \frac{R^2}{r} dr = 2\pi k \rho R^2 \int_r^R \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{V = 2\pi k \rho R^2 \ln \frac{R}{r}}$$

El potencial para cualquier interior del cilindro (r < R) también será el trabajo realizado al transportar la unidad de carga desde la superficie del cilindro al punto. Análogamente al caso anterior:

$$V = \int_r^R E.dr = \int_r^R 2\pi k \rho r\, dr = 2\pi k \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_r^R$$

$$\boxed{V = \pi k \rho \left(R^2 - r^2\right)}$$

CUADERNO

218.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

info@mairea-libros.com

84-9728-202-7

